

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

---

Кафедра «Высшая математика»

**Е.А. Благовещенская**

**Методические указания**  
**по выполнению практических заданий**  
*по дисциплине*  
**«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.13)**

для специальности  
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации  
«Информационная безопасность автоматизированных систем на  
транспорте»

Форма обучения – очная

**РАЗДЕЛ 4. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ  
РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Санкт-Петербург

## Практические занятия 9-10. Действия с матрицами.

### Матрицы. Действия над матрицами

**Пример.** Найти  $\mathbf{A}^T$ ,  $3\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ , если  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ .

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$3\mathbf{A} = 3 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 & -1+1 \\ 4+4 & 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

**Пример.** Можно ли вычислить  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  и  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ , если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}?$$

Операция  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  возможна, т.к. количество столбцов  $\mathbf{A}$  совпадает с числом строк  $\mathbf{B}$ , умножение  $\mathbf{B}$  на  $\mathbf{A}$  не определено.

**Пример.** Вычислить  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-5) \\ 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

**Пример.** Вычислить  $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 4 & (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot 5 & (-2) \cdot 3 + (-1) \cdot 6 \\ 0 \cdot 1 + 7 \cdot 4 & 0 \cdot 2 + 7 \cdot 5 & 0 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -12 \\ 28 & 35 & 42 \end{pmatrix}.$$

На рисунке 2.1 показан выбор сомножителей при вычислении элемента, расположенного во второй строке и третьем столбце (умножение «строка на столбец»).

$$\begin{array}{cc|ccc}
 & & 1 & 2 & 3 \downarrow \\
 & & & & + \\
 & & 4 & 5 & 6 \downarrow \\
 \hline
 -2 & -1 & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 7 & \dots & \dots & 0 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \\
 \rightarrow & + & \rightarrow & & 
 \end{array}$$

Рис. 2.1

### Практические занятия 11-12. Вычисление определителей.

**Пример.** Вычислить определители.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - (-5)4 = -4 + 20 = 16 \text{ (рис. 2.2)}.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot (-6) + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 2 - \\
 - 2 \cdot 5 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 0 \cdot (-6) = -103 \text{ (рис. 2.3)}.$$

**Пример.** Найти значение  $\alpha$ , при котором определитель  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & \alpha \end{vmatrix}$  равен 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & \alpha \end{vmatrix} = 2\alpha - 6 = 0; \alpha = 3.$$

**Пример.** Вычислить алгебраическое дополнение  $A_{21}$  определителя

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix}.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot ((-1) \cdot (-6) - 2 \cdot 2) = -8$$

**Пример.** Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix}$  разложением по

элементам второй строки.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -103.$$

**Пример.** Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$  разложением по элементам первого столбца.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot (-6) = -120.$$

*Замечание.* Определитель называется треугольным, если все числа, расположенные выше (ниже) элементов главной диагонали  $a_{ii}$ , равны нулю. Треугольный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

**Пример.** Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} b & 34 & 3 \\ 0 & 35 & 0 \\ 6 & 33 & a \end{vmatrix}$ , если  $\begin{vmatrix} a & 3 \\ 6 & b \end{vmatrix} = \frac{2}{7}$ .

После разложения по второй строке получаем

$$\begin{vmatrix} b & 34 & 3 \\ 0 & 35 & 0 \\ 6 & 33 & a \end{vmatrix} = 35 \begin{vmatrix} b & 3 \\ 6 & a \end{vmatrix} = 35 \cdot \frac{2}{7} = 10.$$

**Пример.** Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$ .

После вынесения за знак определителя общих множителей первой строки, второй строки и второго столбца, получаем

$$\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 132.$$

**Пример.** Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 13 \\ 1 & 11 & 0 \\ 3 & 1 & -8 \end{vmatrix}$ .

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 13 \\ 1 & 11 & 0 \\ 3 & 1 & -8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 11 & 0 \\ -2 & 4 & 13 \\ 3 & 1 & -8 \end{vmatrix} = \langle \text{Строки 1, 2 переставлены местами.} \rangle$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 11 & 0 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -32 & -8 \end{vmatrix} = \left\langle \begin{array}{l} \text{Ко второй строке прибавлена первая,} \\ \text{умноженная на 2;} \\ \text{к третьей строке прибавлена первая,} \\ \text{умноженная на } (-3). \end{array} \right\rangle =$$

$$= -13 \cdot (-8) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 11 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \left\langle \begin{array}{l} \text{Общие множители второй и} \\ \text{третьей строк вынесены} \\ \text{за знак определителя.} \end{array} \right\rangle =$$

$$= 104 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 11 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \left\langle \begin{array}{l} \text{К третьей строке прибавлена вторая,} \\ \text{умноженная на } (-2). \end{array} \right\rangle =$$

$$= 104 (1 \cdot 2 \cdot (-1)) = -208.$$

**Пример.** Доказать формулу  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Разложение определителя по элементам второго столбца, например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+2} a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} a_{12} (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) +$$

$$+ (-1)^{2+2} a_{22} (a_{11} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31}) + (-1)^{3+2} a_{32} (a_{11} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{21}).$$

Раскрыв скобки, получим искомую формулу.

**Пример.** Разложить определитель  $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 & -6 \end{vmatrix}$  по первой строке.

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 9 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -4 & -5 & -6 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & -5 & -6 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & -4 & -6 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

### Обратная матрица

**Пример.** Найти матрицу  $\mathbf{A}^{-1}$ , обратную матрице  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Сделать

проверку.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1 = -2 \neq 0.$$

Алгебраические дополнения первой строки:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} a_{22} = (-1)^{1+1} (-1) = -1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} a_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1;$$

алгебраические дополнения второй строки:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} a_{12} = (-1)^{1+2} (-2) = 2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} a_{11} = (-1)^{2+2} (4) = 4.$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Проверка. } \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 4 + (-1) \cdot 1 & \frac{1}{2}(-2) + (-1)(-1) \\ \frac{1}{2} \cdot 4 + (-2) \cdot 1 & \frac{1}{2}(-2) + (-2)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -1+1 \\ 2-2 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$

**Пример.** Используя матричные операции, выразить  $z_1, z_2$  через  $x_1, x_2$ ,

$$\text{если } \begin{cases} y_1 = 4z_1 - 2z_2; \\ y_2 = z_1 - z_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_1 = 2x_1 + 4x_2; \\ y_2 = 3x_1 - x_2. \end{cases}$$

$$\text{Введем матрицы: } \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда  $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$ .

Умножая обе части матричного равенства  $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}$  на  $\mathbf{A}^{-1}$ , получаем  $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}$ ;  $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{Z}$ ;  $\mathbf{Z} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Y}$ .

После подстановки  $\mathbf{Y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$ :  $\mathbf{Z} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$ .

Матрица  $\mathbf{A}^{-1}$  получена в предыдущем примере.

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + 3x_2 \\ -5x_1 + 4x_2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} z_1 = -2x_1 + 3x_2; \\ z_2 = -5x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Проверка. Подстановка решения в первую систему приводит ко второй системе:

$$\begin{cases} y_1 = 4z_1 - 2z_2; \\ y_2 = z_1 - z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 4(-2x_1 + 3x_2) - 2(-5x_1 + 4x_2); \\ y_2 = (-2x_1 + 3x_2) - (-5x_1 + 4x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2x_1 + 4x_2; \\ y_2 = 3x_1 - x_2. \end{cases}$$

**Пример.** Доказать, что для матрицы второго порядка  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

обратная матрица имеет вид  $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$ .

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Алгебраические дополнения первой строки:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} a_{22} = a_{22}; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} a_{21} = -a_{21};$$

алгебраические дополнения второй строки:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} a_{12} = -a_{12}; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} a_{11} = a_{11}.$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

**Пример.** Доказать, что решение уравнения  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$  может быть записано в матричной форме  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  при условии существования обратной матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$ .

После умножения системы  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$  на обратную матрицу  $\mathbf{A}^{-1}$ :

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

**Практические занятия 13-16. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.**

**Пример.** Решить систему уравнений  $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = -1; \\ x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$  по формулам

Крамера и сделать проверку.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 22 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{11}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{11}.$$

$$\text{Проверка.} \begin{cases} 5\frac{1}{11} - 2\frac{8}{11} = -1; \\ \frac{1}{11} + 4\frac{8}{11} = 3. \end{cases}$$

**Пример.** Решить систему уравнений  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_1 + 4x_3 = -1; \\ x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}$  по формулам

Крамера и сделать проверку.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -14 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -10,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 26, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 6.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{7}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{13}{7}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{3}{7}.$$

$$\text{Проверка.} \begin{cases} 2 \cdot \frac{5}{7} - \left(-\frac{13}{7}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = 2; \\ \frac{5}{7} + 4 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = -1; \\ \frac{5}{7} + 2 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = -3. \end{cases}$$



**Практические занятия 17-20. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.**

**Пример.** Решить систему уравнений  $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0; \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$  различными способами.

1. Метод Гаусса.  $\left( \begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim$

$\left( \begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right).$   $\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 2. \end{cases}$

2. Формулы Крамера.

$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2.$

3. Матричный метод.

Матрица  $\mathbf{A}^{-1}$  обратная  $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ :  $\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

**Практические занятия 21-22. Вычисление ранга матриц.**

**Пример.** Установить ранг матрицы  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

Минор порядка 1 (выбраны 1-ая строка и 1-ый столбец):  $5 \neq 0.$

Минор порядка 2 (выбраны 1-ая, 2-ая строки и 1-ый, 2-ая столбцы):

$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - (-1) \cdot 2 = 2 \neq 0.$

Минор порядка 3:  $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Существует минор второго порядка, отличной от нуля, при этом единственный минор третьего порядка равен нулю:  $\text{rang} \mathbf{A} = 2$ .

**Пример.** Найти ранг матрицы  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Минор порядка 1:  $2 \neq 0$ .

Минор порядка 2:  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \neq 0$ .

Минор порядка 3:  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot 9 \neq 0$ .

Все миноры порядка 4 имеют нулевую строку и равны нулю:  $\text{rang} \mathbf{A} = 3$ .

*Замечание.* Матрицы подобные матрице  $\mathbf{A}$  называются ступенчатыми (трапециевидными). Ранг ступенчатой матрицы равен числу строк, не все элементы которых равны нулю.

**Пример.** Найти ранг матрицы  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix} \sim \left\langle \begin{array}{l} \text{Ко второй строке прибавлена первая,} \\ \text{умноженная на } (-2); \\ \text{к третьей строке} - \text{ первая,} \\ \text{умноженная на } (-5). \end{array} \right\rangle$

После перемены местами двух последних строк  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  матрица

становится ступенчатой с двумя ненулевыми строками, следовательно,  $\text{rang} \mathbf{A} = 2$ .

**Практические занятия 23-24. Исследование СЛАУ по теореме Кронекера-Капелли.**

## Теорема Кронекера–Капелли

**Пример.** Исследовать систему уравнений 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5; \\ 3x_1 + 6x_2 = 15. \end{cases}$$

Матрица системы:  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ .

Расширенная матрица:  $\mathbf{A}^p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$ .

Миноры второго порядка этих матриц  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 15 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{vmatrix}$  равны нулю. Ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы  $r = \text{rang}\mathbf{A} = \text{rang}\mathbf{A}^p = 1$ .

Система совместна. Из двух неизвестных  $x_1, x_2$ , одна, например  $x_2$ , является свободной. Если  $x_2 = \alpha$  ( $\alpha$  – любое число), то  $x_1 = 5 - 2\alpha$ .

**Пример.** При каких  $A$  и  $B$  система 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = B; \\ 3x_1 + Ax_2 = 15. \end{cases}$$
 является

неопределённой?

Система имеет бесконечное множество решений,

если миноры  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & A \end{vmatrix}$  и  $\begin{vmatrix} 1 & B \\ 3 & 15 \end{vmatrix}$  расширенной матрицы равны нулю.

После раскрытия определителей: 
$$\begin{cases} 1 \cdot A - 2 \cdot 3 = 0; \\ 2 \cdot 15 - 6 \cdot B = 0. \end{cases}$$

Система является неопределённой при  $A = 6; B = 5$ .

**Пример.** Установить число свободных неизвестных в системе

уравнений 
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0; \\ x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Три первых строки и столбца матрицы системы образуют базисный

минор:  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ .

Ранги матрицы и расширенной матрицы:  $r = \text{rang}\mathbf{A} = \text{rang}\mathbf{A}^p = 3$ .

Число неизвестных  $n = 5$ ;

$n - r = 2$ : неизвестные  $x_4, x_5$ , например, можно считать свободными;

остальные неизвестные  $x_1, x_2, x_3$  являются базисными.

## Системы линейных уравнений

### Система $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными

**Пример.** Решить систему уравнений  $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 17 \end{cases}$  и сделать

проверку.

$$A^p = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 17 \end{array} \right)$$

⟨Расширенная матрица системы.⟩

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & -1 & 5 & 17 \end{array} \right)$$

⟨Переставлены вторая  
и первая строки.⟩

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 10 \\ 0 & -5 & 9 & 17 \end{array} \right)$$

⟨Ко второй строке прибавлена первая,  
умноженная на  $(-3)$ ;  
к третьей строке  $-$  первая,  
умноженная на  $(-4)$ .⟩

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array} \right)$$

⟨К третьей строке прибавлена вторая,  
умноженная на  $(-5)$ .⟩

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

⟨Вторая строка умножена на  $(-1)$ ;  
третья строка умножена на  $(-1/11)$ .⟩

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

⟨Ко второй строке прибавлена третья,  
умноженная на 4;  
к первой строке прибавлена третья.⟩

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

⟨К первой строке прибавлена  
вторая, умноженная на  $(-1)$ .⟩

Совместная и определённая система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 2; \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Проверка.  $\begin{cases} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 = 10; \\ 1 + 2 - 3 = 0; \\ 4 \cdot 1 - 2 + 5 \cdot 3 = 17. \end{cases}$

**Пример.** Установить значения параметров  $A$  и  $B$ , при которых система  $\begin{cases} 1x + 2y = B; \\ Ax + 4y = 10 \end{cases}$  является неопределённой? Найти решения системы. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 1x + 2y = B; \\ Ax + 4y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x + 2y = B; \\ (A - 2)x + 0y = 10 - 2B. \end{cases}$$

Система при  $A = 2$  и  $B = 5$ :  $\begin{cases} 1x + 2y = 5; \\ 0x + 0y = 0. \end{cases}$

Эта система имеет бесконечное множество решений, которые можно представить в виде  $x = 5 - 2y$ . Проверка.  $\begin{cases} (5 - 2y) + 2y \equiv 5; \\ 2(5 - 2y) + 4y \equiv 10. \end{cases}$

**Пример.** Решить систему линейных уравнений  $\begin{cases} 1x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - 1x_2 + 6x_3 = 0; \\ 5x_1 + 1x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 1x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ 0x_1 - 0x_2 + 0x_3 = 0; \\ 0x_1 + 11x_2 - 11x_3 = 0. \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ко второй строке прибавлена первая,} \\ \text{умноженная на } (-2); \\ \text{к третьей строке } - \text{ первая,} \\ \text{умноженная на } (-5). \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_2 - x_3 = 0; \\ 0x_1 - 0x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Вторая строка умножена на } 1/11; \\ \text{вторая и третья строки переставлены.} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0; \\ x_2 - x_3 = 0; \\ 0x_1 - 0x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{К первой строке прибавлена вторая,} \\ \text{умноженная на } 2. \end{array} \right.$$

Совместная неопределённая система имеет множество решений, которые можно представить в виде  $\begin{cases} x_1 = -x_3; \\ x_2 = x_3. \end{cases}$

**Пример.** Решить систему уравнений  $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8 \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$



Расширенная матрица  $\mathbf{A}$  системы:  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ .

После прибавления к второй строке первой строки, умноженной на 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{rang}\mathbf{A}^p = \text{rang}\mathbf{A} = 1 < n.$$

Базисная неизвестная:  $x_1 = 2x_2 - 3x_3$ ;

Свободные неизвестные:  $x_2, x_3$ .