ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

Е.А. Благовещенская

Методические указания
по выполнению практических заданий
по дисциплине
«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.13)

для специальности
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации
«*Безопасность автоматизированных систем на железнодорожном транспорте*»

Форма обучения – очная

РАЗДЕЛ 5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Санкт-Петербург

Практическое занятие 1. Линейные операции над векторами.

Пример. При каком значении k векторы $\bar{a}(-1;\,4)$ и $\bar{b}(2;\,k)$ линейно зависимы?

Условие линейной зависимости: $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & k \end{vmatrix} = 0$. Отсюда $k = 8$.

Проверка $\bar{b} = \lambda\bar{a}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Пример. Доказать, что векторы $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ образуют базис и

разложить по этому базису вектор $\bar{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Условие линейной независимости: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Представление вектора $\bar{d}$ суммой $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta \\ 4\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1\alpha + 2\beta \\ 3\alpha + 4\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Решение системы уравнений $\begin{cases} 1\alpha + 2\beta = 5; \\ 3\alpha + 4\beta = 11 \end{cases}$ имеет вид $\begin{cases} \alpha = 1; \\ \beta = 2. \end{cases}$

Разложение вектора $\bar{d}$ по векторам базиса $\bar{a}, \bar{b}$: $\bar{d} = 1 \cdot \bar{a} + 2 \cdot \bar{b}$.

Пример. Доказать, что при $n = 2$ любой вектор $\bar{d}$ может быть единственным образом разложен по векторам базиса $\bar{a}, \bar{b}$.

Условие линейной независимости: $\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \neq 0$.

Разложение по векторам базиса: $\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$.

Крамеровская система линейных уравнений $\begin{cases} d_x = \alpha a_x + \beta b_x; \\ d_y = \alpha a_y + \beta b_y \end{cases}$

(относительно неизвестных α, β) имеет единственное решение, т.к. $\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \neq 0$.

Пример. Доказать, что при $n = 2$ любые три вектора $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ линейно зависимы.

Если $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ линейно зависимы, то в равенстве $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 = 0$ один из коэффициентов, например α_1, отличен от нуля. Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ линейно зависимы, т.к. в равенстве $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \alpha_3\bar{a}_3 = 0$ присутствует отличный от нуля коэффициент α_1.

Если $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ линейно независимы, то они образуют базис и $\bar{a}_3 = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2$. Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ линейно зависимы, т.к. в равенстве $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + (-1)\cdot\bar{a}_3 = 0$ присутствует отличный от нуля коэффициент.

Пример. При каком значении A векторы $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\A\end{pmatrix}$ линейно зависимы. Найти эту зависимость.

Условие линейной зависимости: $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & A\end{vmatrix} = 0$. Отсюда $A = -1$.

Векторное уравнение $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ имеет ненулевые решения, например, $\alpha_1 = -1$; $\alpha_2 = 1$; $\alpha_3 = 1$.

Линейная зависимость векторов: $(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Пример. Доказать, что векторы $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ образуют базис и разложить по этому базису вектор $\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$.

Признак линейной независимости: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Представление вектора $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ суммой: $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Решение системы уравнений $\begin{cases} 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 3; \\ 1 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = 3; \\ 0 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 2 \end{cases}$ имеет вид $\begin{cases} \alpha_1 = 2; \\ \alpha_2 = 1; \\ \alpha_3 = 1. \end{cases}$

Разложение вектора: $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Практическое занятие 2. Координаты вектора относительно базиса.

Пример. Доказать, что разность векторов $\overline{b} - \overline{a}$ равна диагонали параллелограмма (рис. 3.15).

Обозначим диагональ параллелограмма $\overline{x}$.

$\overline{a} + \overline{x} = \overline{b}$;

$\overline{x} = \overline{b} - \overline{a}$.

Замечание. Вторая диагональ равна $\overline{a} + \overline{b}$.

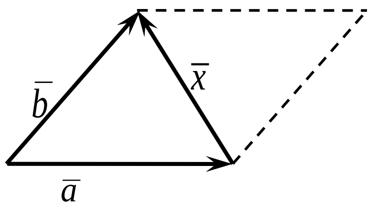


Рис. 3.15

Пример. Найти отношение длин диагоналей параллелограмма

(рис. 3.16), построенного на векторах $\overline{a}$ = (3; 5; –2) и $\overline{b}$ = (–2; 3; –3).

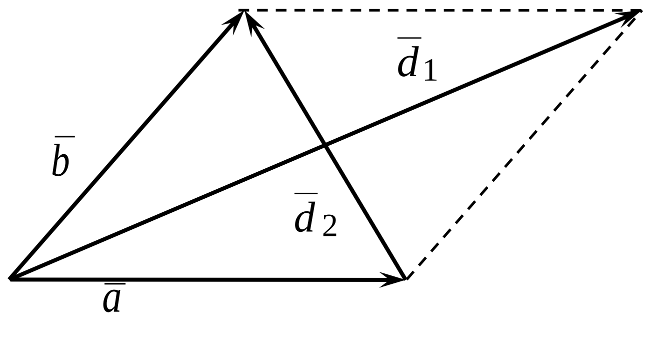


Рис. 3.16

$\bar{d}_1 = \bar{a} + \bar{b} = (1; 8; -5)$, $\bar{d}_2 = \bar{b} - \bar{a} = (-5; -2; -1)$.

Отношение длин диагоналей: $\dfrac{|\bar{d}_1|}{|\bar{d}_2|} = \dfrac{\sqrt{1+64+25}}{\sqrt{25+4+1}} = \dfrac{\sqrt{90}}{\sqrt{30}} = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$.

Пример. Найти координаты x_M; y_M точки M (рис. 3.16), делящей отрезок AB в отношении $\dfrac{AM}{BM} = \lambda$, если $A(1; 4)$, $B(4; -2)$, $\lambda = 2$.

$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \lambda \cdot \overline{MB} =$
$= \overline{OA} + \lambda \cdot (\overline{OB} - \overline{OM})$,
$(1+\lambda) \cdot \overline{OM} = \overline{OA} + \lambda \cdot \overline{OB}$.

$$\begin{cases} (1+\lambda) \cdot x_M = x_A + \lambda \cdot x_B; \\ (1+\lambda) \cdot y_M = y_A + \lambda \cdot y_B; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+2) \cdot x_M = 1 + 2 \cdot 4; \\ (1+2) \cdot y_M = 4 + 2 \cdot (-2); \end{cases} \qquad \begin{cases} x_M = 3; \\ y_M = 0. \end{cases}$$

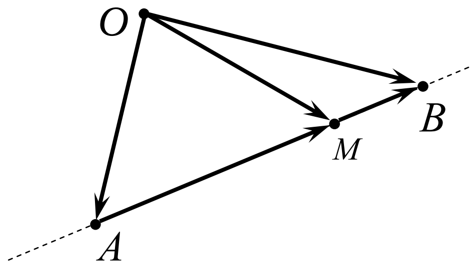
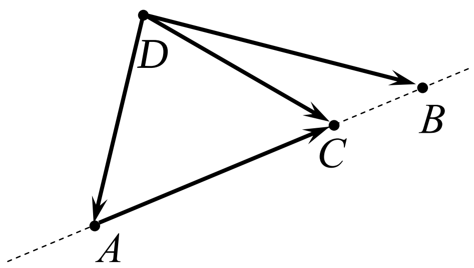


Рис. 3.16

Замечание. Координаты середины отрезка при $\lambda = \dfrac{AM}{BM} = 1$ можно вычислить по формулам $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}; \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}. \end{cases}$

Пример. В пространстве заданы четыре точки A, B, C и D, не лежащие на одной прямой, при этом точка C принадлежит отрезку AB. Доказать, что $\overline{DC} = \dfrac{\mu}{\mu+\lambda}\overline{DA} + \dfrac{\lambda}{\mu+\lambda}\overline{DB}$, если $\dfrac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|} = \dfrac{\lambda}{\mu}$.



$$\overline{DC} = \overline{DA} + \overline{AC} = \overline{DA} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}(\overline{DB} - \overline{DA}) =$$

$$= \overline{DA} - \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\cdot\overline{DA} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\cdot\overline{DB} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}\cdot\overline{DA} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\cdot\overline{DB}.$$

Пример. Найти направляющие косинусы вектора $\bar{a} = (3;\ 4)$.

Модуль вектора: $|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$;

направляющие косинусы вектора: $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\bar{a}|} = \dfrac{3}{5}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\bar{a}|} = \dfrac{4}{5}$.

Пример. Найти вектор $\bar{a}$, коллинеарный вектору $\overline{AB}$, направленный противоположно $\overline{AB}$, такой, что $|\bar{a}| = 6$, если A(–1; 4; 7), B (1; 3; 5).

$\overline{AB} = (1-(-1))\bar{i} + (3-4)\,\bar{j} + (5-7)\bar{k} = 2\bar{i} - 1\bar{j} - 2\bar{k}$,

$\bar{a} = -|\lambda|\cdot\overline{AB} = -2|\lambda|\,\bar{i} + |\lambda|\,\bar{j} + 2|\lambda|\,\bar{k}$,

$|\bar{a}| = \sqrt{4\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2} = 3|\lambda|$, $|\lambda| = \dfrac{6}{3} = 2$,

$\bar{a} = -4\bar{i} + 2\,\bar{j} + 4\bar{k}$.

Практическое занятие 3. Действия с векторами в декартовой системе.

Пример. Доказать, что разность векторов $\bar{b} - \bar{a}$ равна диагонали параллелограмма (рис. 3.15).

Обозначим диагональ параллелограмма $\bar{x}$.

$\bar{a} + \bar{x} = \bar{b}$;

$\bar{x} = \bar{b} - \bar{a}$.

Замечание. Вторая диагональ равна $\bar{a} + \bar{b}$.

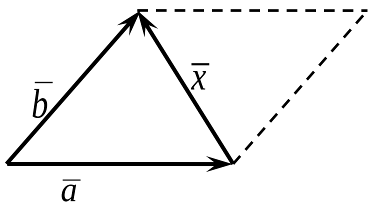


Рис. 3.15

Пример. Найти отношение длин диагоналей параллелограмма (рис. 3.16), построенного на векторах $\bar{a}$ = (3; 5; –2) и $\bar{b}$ = (–2; 3; –3).

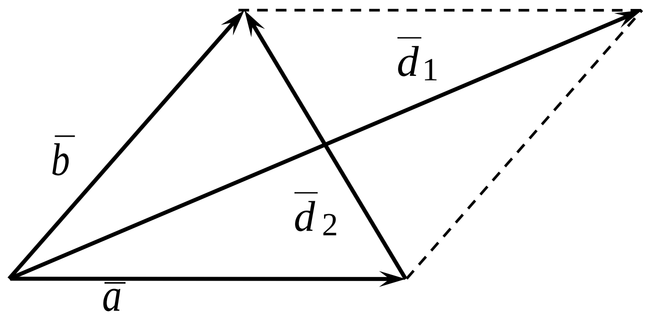


Рис. 3.16

$\bar{d}_1 = \bar{a} + \bar{b} = (1; 8; -5)$, $\bar{d}_2 = \bar{b} - \bar{a} = (-5; -2; -1)$.

Отношение длин диагоналей: $\dfrac{|\bar{d}_1|}{|\bar{d}_2|} = \dfrac{\sqrt{1+64+25}}{\sqrt{25+4+1}} = \dfrac{\sqrt{90}}{\sqrt{30}} = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$.

Пример. Найти координаты x_M; y_M точки M (рис. 3.16), делящей отрезок AB в отношении $\dfrac{AM}{BM} = \lambda$, если $A(1; 4)$, $B(4; -2)$, $\lambda = 2$.

$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \lambda \cdot \overline{MB} =$
$= \overline{OA} + \lambda \cdot (\overline{OB} - \overline{OM})$,
$(1+\lambda) \cdot \overline{OM} = \overline{OA} + \lambda \cdot \overline{OB}$.

$$\begin{cases}(1+\lambda) \cdot x_M = x_A + \lambda \cdot x_B; \\ (1+\lambda) \cdot y_M = y_A + \lambda \cdot y_B;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(1+2) \cdot x_M = 1 + 2 \cdot 4; \\ (1+2) \cdot y_M = 4 + 2 \cdot (-2);\end{cases} \quad \begin{cases}x_M = 3; \\ y_M = 0.\end{cases}$$

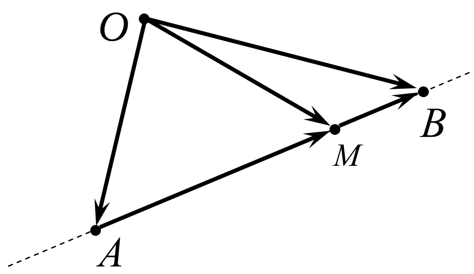
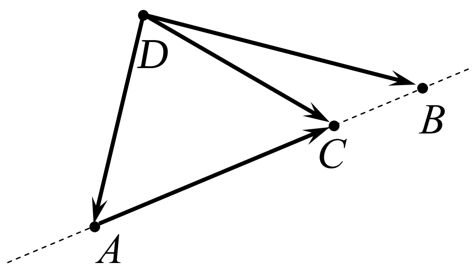


Рис. 3.16

Замечание. Координаты середины отрезка при $\lambda = \dfrac{AM}{BM} = 1$ можно

вычислить по формулам $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}; \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}. \end{cases}$

Пример. В пространстве заданы четыре точки A, B, C и D, не лежащие на одной прямой, при этом точка C принадлежит отрезку AB. Доказать, что $\overline{DC} = \dfrac{\mu}{\mu+\lambda}\overline{DA} + \dfrac{\lambda}{\mu+\lambda}\overline{DB}$, если $\dfrac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|} = \dfrac{\lambda}{\mu}$.



$\overline{DC} = \overline{DA} + \overline{AC} = \overline{DA} + \dfrac{\lambda}{\mu+\lambda}(\overline{DB} - \overline{DA}) =$

$$= \overline{DA} - \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\cdot\overline{DA} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\cdot\overline{DB} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}\cdot\overline{DA} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\cdot\overline{DB}.$$

Пример. Найти направляющие косинусы вектора $\overline{a} = (3;\, 4)$.

Модуль вектора: $|\overline{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$;

направляющие косинусы вектора: $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|} = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|} = \frac{4}{5}$.

Пример. Найти вектор $\overline{a}$, коллинеарный вектору $\overline{AB}$, направленный противоположно $\overline{AB}$, такой, что $|\overline{a}| = 6$, если $A(-1;\, 4;\, 7)$, $B\,(1;\, 3;\, 5)$.

$\overline{AB} = (1-(-1))\overline{i} + (3-4)\,\overline{j} + (5-7)\overline{k} = 2\overline{i} - 1\overline{j} - 2\overline{k}$,

$\overline{a} = -|\lambda|\cdot\overline{AB} = -2|\lambda|\,\overline{i} + |\lambda|\,\overline{j} + 2|\lambda|\overline{k}$,

$|\overline{a}| = \sqrt{4\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2} = 3|\lambda|$, $|\lambda| = \frac{6}{3} = 2$,

$\overline{a} = -4\overline{i} + 2\,\overline{j} + 4\overline{k}$.

Практическое занятие 4. Вычисление скалярного произведения.

Пример. Вычислить скалярное произведение.

$(2\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k})\cdot(-5\overline{i} + \overline{k}) = (2\cdot(-5) + 3\cdot 0 + 4\cdot 1) = -6$.

Пример. Найти значение параметра k, при котором векторы $\overline{a} = (4;\, 2k;\, -1)$ и $\overline{b} = (-1;\, 1;\, 4)$ ортогональны.

$\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$ или $4(-1) + 2k(-1) + (-1)\cdot 4 = 0$, отсюда $k = -4$.

Пример. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 0,5$; $|\overline{b}| = 8$; $\overline{a}\cdot\overline{b} = 2\sqrt{2}$.

$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{2\sqrt{2}}{0,5\cdot 8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Пример. Найти косинус угла между векторами $\overline{a} = (2;\, 1;\, -2)$, $\overline{b} = (-4;\, 3;\, 0)$ и проекцию вектора $\overline{a}$ на направление вектора $\overline{b}$.

$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$; $|\overline{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2} = 5$;

$\overline{a}\cdot\overline{b} = 2(-4) + 1\cdot 3 + (-2)\cdot 0 = -5$;

$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{-5}{3\cdot 5} = -\frac{1}{3}$; $\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|} = \frac{-5}{5} = -1$.

Пример. Доказать теорему косинусов ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$).

В треугольнике ABC обозначим $\overline{AB} = \overline{c}$, $\overline{CB} = \overline{a}$, $\overline{CA} = \overline{b}$, тогда $\bar{a} = \bar{b} + \bar{c}$. Отсюда $\bar{a} \cdot \bar{a} = (\bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{b} + \bar{c})$. Раскрывая скобки,

получим $a^2 = b^2 + c^2 + 2\bar{b} \cdot \bar{c}$ или $a^2 = b^2 + c^2 + 2|\bar{b}| \cdot |\bar{c}| \cos(\pi - A)$.

Тогда $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

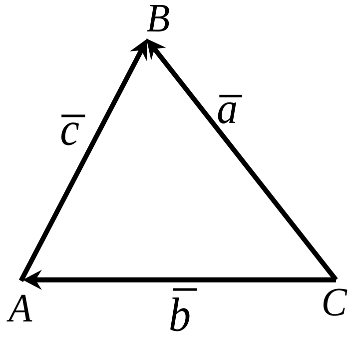


Рис. 3.18

Пример. На тело действует сила величиной 4 Н, линия действия которой составляет угол $\varphi = -60°$ с горизонтальной осью. Найти проекции силы $\bar{F}$ на оси $0x$ и $0y$.

Проекция силы $\bar{F}$ на ось $0x$: $F_x = F \cdot \cos\varphi = 4 \cdot \cos(-60^\circ) = 2$ Н.

Проекция $\bar{F}$ на ось $0y$: $F_y = F \cdot \sin\varphi = 4 \cdot \sin(-60^\circ) = -2\sqrt{3}H \approx -3{,}4$ Н.

Пример. Сила F = 400 Н направлена под углом $\varphi = 30°$ к направлению движения объекта. Вычислить работу этой силы, если объект прошел расстояние s = 5 м.

$A = \bar{F} \cdot \bar{s} = F \cdot s \cdot \cos\varphi = 400 \cdot 5 \cdot \cos 30^\circ = 1700$ Дж.

Пример. Под действием силы $\bar{F}$ тело движется вверх по наклонной плоскости под углом $\varphi = 60°$ к горизонту. Найти силу, действующую на тело, если при перемещении тела на 4 м по горизонтали его энергия увеличилась на 200 Дж.

$A = \bar{F} \cdot \bar{s} = F \cdot s \cdot \cos\varphi = F \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 200$ Дж.

$F = \dfrac{200}{4 \cdot \cos 60^\circ}$ Н =100 Н.

Практическое занятие 5. Решение основных задач аналитической геометрии на плоскости.

Пример. Найти длину и уравнение высоты PH треугольника FPR, где $F(-1;5)$, $P(2;-5)$, $R(2;6)$.

Уравнение прямой FR: $\dfrac{x+1}{2+1}=\dfrac{y-5}{6-5}$ или $x-3y+16=0$.

$\overline{FR}=\bar{i}-3\bar{j}$ – нормальный вектор прямой FR и направляющий вектор прямой PH.

Уравнение прямой PH: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+5}{-3}$ или $3x+y-1=0$.

Расстояние от точки $(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$:

$$h=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Расстояние от точки P до прямой FR:

$$|PH|=\frac{|1\cdot 2-3\cdot(-5)+16|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{33}{\sqrt{10}}=3{,}3\sqrt{10}\approx 10{,}44.$$

Практическое занятие 6. Различные уравнения прямой линии на плоскости.

Пример. Записать различные уравнения прямой L, изображенной на рисунке 4.

Уравнение прямой в отрезках: $\dfrac{x}{(-2)}+\dfrac{y}{1}=1$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки: $\dfrac{x-0}{-2-0}=\dfrac{y-1}{0-1}$.

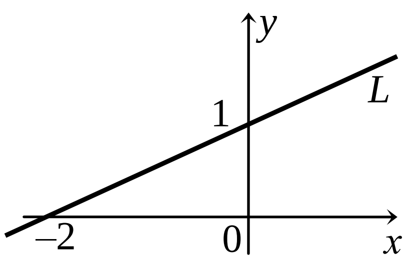


Рис. 4

Направляющий вектор прямой: $\overline{R}=(l;m)=(-2-0;0-1)=(-2;-1)$;

каноническое уравнение прямой: $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-0}{-1}$.

Общее уравнение прямой: $x - 2y + 2 = 0$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = 0{,}5\,x + 1$.

Пример. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точки (0; 0) и (–2; 1).

Угловой коэффициент прямой: $k=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{1-0}{-2-0}=-\frac{1}{2}$.

Пример. Записать общее уравнение прямой, проходящей через точки $A(4;\ 1)$, $B(5;\ 3)$, найти отрезки a и b,отсекаемые этой прямой на осях, угловой коэффициент прямой и тангенс угла между ней и прямой $3x - y - 3 = 0$, координаты точки пересечения M^* этих прямых.

Уравнение прямой L, проходящей через точки A и B: $\frac{x-4}{5-4}=\frac{y-1}{3-1}$;

Общее уравнение прямой L: $2x - y - 7 = 0$.

Уравнение прямой L в отрезках: $\frac{x}{3{,}5}+\frac{y}{-7}=1$; $a = 3{,}5$; $b = -7$.

Уравнение L с угловым коэффициентом: $y = 2x - 7$; $k = \mathrm{tg}\alpha = 2$.

Угловой коэффициент прямой $3x - y - 3 = 0$: $k_1 = 3$.

Практическое занятие 7. Взаимное расположение прямых на плоскости.

Тангенс угла φ с между прямыми $3x - y - 3 = 0$ и $2x - y - 7 = 0$:

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{k_1-k}{1+k_1k}=\frac{3-2}{1+3\cdot 2}=\frac{1}{7}.$$

Точка пересечения прямых: $\begin{cases}2x^*-y^*-7=0;\\3x^*-y^*-3=0.\end{cases}$. Отсюда $x^*=-4$; $y^*=-15$.

Пример. Записать уравнения прямых, проходящих через точку (3; 2), параллельно и перпендикулярно прямой $y = 0{,}5\,x + 1$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_0\ (x_0;\ y_0)$: $y=k(x-x_0)+y_0$.

Угловой коэффициент прямой $y = 0{,}5\,x + 1$: $k = 0{,}5$.

Условие параллельности прямых: $k_1 = k = 0{,}5$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k_1: $y=0{,}5(x-3)+2$ или $y=0{,}5x+0{,}5$.

Условие перпендикулярности прямых: $k_2 = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{0,5} = -2$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k_2: $y = -2(x-3)+2$ или $y = -2x+8$.

Практическое занятие 8. Различные уравнения плоскости в пространстве.

Пример. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки (1; 0; 0), (0; 2; 0) и (0; 0; 3).

Рассмотрим два способа.

1) $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0-1 & 2-0 & 0-0 \\ 0-1 & 0-0 & 3-0 \end{vmatrix} = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через три точки. Раскрывая определитель, находим

$6x + 3y + 2z - 6 = 0$ – общее уравнение плоскости.

2) Плоскость отсекает на осях (рис. 12) отрезки $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

Уравнение плоскости в отрезках: $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

Пример. Найти косинус угла между плоскостями $x - 4y - 8z - 3 = 0$ и $2x - y - 2z + 4 = 0$.

$\overline{N}_1 = (1; -4; -8)$; $\overline{N}_2 = (2; -1; -2)$;

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2|}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|} = \frac{|1\cdot 2 + (-4)\cdot(-1) + (-8)\cdot(-2)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2} \cdot \sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \frac{22}{27}.$$

Пример. Определить положение плоскости $3x + 4z - 5 = 0$ в пространстве.

В уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ коэффициенты $B = 0$ и $D \neq 0$.

Плоскость $3x + 4z - 5 = 0$ параллельна оси $0y$.

Пример. Определить положение плоскости $2y + 5 = 0$ в пространстве.

В уравнении $2y + 5 = 0$ коэффициенты $A = 0$, $C = 0$, $B \neq 0$, $D \neq 0$.

Плоскость $2y + 5 = 0$ перпендикулярна оси $0y$ и параллельна плоскости $0xz$.

Пример. Вывести уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

Произвольная точка $M(x; y; z)$ лежит в одной плоскости с точками M_0, M_1, M_2, если векторы

$$\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0),$$
$$\overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0),$$
$$\overline{M_0M_2} = (x_2 - x_0; y_2 - y_0; z_2 - z_0)$$

компланарны и их смешанное произведение равно нулю.

Уравнение плоскости: $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$

Замечание. Через три точки пространства $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость.

Практическое занятие 9. Различные уравнения прямой в пространстве.

Пример. Записать уравнения прямой с направляющим вектором: $\overline{R}$ (1; 2; 3), проходящей через точкуB(4; 5; 6).

Канонические уравнения прямой: $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-6}{3}$.

Пример. Записать уравнения прямой, перпендикулярной плоскости $2x + 3y – z– 5 = 0$ и проходящей через точкуB(2; 0; –1).

Нормальный вектор $\overline{N}$ плоскости является направляющим вектором $\overline{R}$ прямой: $\overline{R}$ = $\overline{N}$ = (2; 3; –1).

Канонические уравнения прямой: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-0}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$.

Пример. Записать уравнение плоскости, перпендикулярной прямой $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-0}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$ и проходящей через точкуB(2; 0; –1).

Направляющий вектор прямой $\overline{R}$ является нормальным вектором плоскости $\overline{N}:\overline{N}$ = $\overline{R}$ = (2; 3; –1).

уравнение плоскости: $2(x–2) + 3y – (z + 1) = 0$.

Пример. Записать уравнения прямой, образованной пересечением плоскостей $5x + 3y + 4z – 8 = 0$ и $2x + y – 1 = 0$.

Нормальные векторы плоскостей: $\overline{N}_1$(5; 4; 3) и $\overline{N}_2$(2; 1; 0). Направляющий вектор прямой:

$$\overline{R} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\overline{i} + 6\overline{j} - 3\overline{k} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решая совместно уравнения плоскостей, фиксируя, например, $x = 0$, находим точку прямой: $x = 0$, $y = 1$, $z = 5/4 = 1{,}25$.

Канонические уравнения прямой: $\dfrac{x-0}{4} = \dfrac{y-1}{6} = \dfrac{z-1{,}25}{-3}$.

Пример. Найти координаты точки M^* пересечения прямой $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{8}$ и плоскости $x + 2y - 2z - 9 = 0$ и синус угла α между прямой и плоскостью (рис. 15).

Параметрические уравнения прямой: $x = 1 - 4t$, $y = -2 + t$, $z = 3 + 8t$.

После подстановки x, y, z в уравнение плоскости: $-18t - 18 = 0$; $t = -1$.

Координаты точки M^* пересечения прямой и плоскости:

$x^* = 1 - 4t\big|_{t=-1} = 1 - 4(-1) = 5$, $y^* = -2 - 1 = -3$, $z^* = 3 + 8(-1) = -5$.

Нормальный вектор плоскости $x + 2y - 2z - 9 = 0$: $\overline{N}\,(1; 2; -2)$;

$$\sin\alpha = \frac{\left|\overline{R}\cdot\overline{N}\right|}{\left|\overline{R}\right|\cdot\left|\overline{N}\right|} = \frac{\left|-4\cdot 1 + 1\cdot 2 + 8\cdot(-2)\right|}{\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 8^2}\cdot\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}.$$

Пример. Определить положение прямой в пространстве, если она проходит через две точки с равными ненулевыми аппликатами.

$z_0 \neq 0$, $n = 0$ в уравнении прямой $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$.

Направляющий вектор $(l; m; 0)$ перпендикулярен орту $\overline{k}\,(0; 0; 1)$.

Прямая перпендикулярна оси $0z$ и параллельна плоскость $x0y$.

Практическое занятие 10. Уравнения кривых второго порядка.
Практическое занятие 11. Уравнения поверхностей второго порядка.

Линии второго порядка на плоскости

Общее уравнение линии второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Эллипс – множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек плоскости (фокусов) F_1 и F_2 постоянна (рис. 4.8): $r_1 + r_2 = 2a$.

Каноническое уравнение эллипса в прямоугольной декартовой системе координат, ось абсцисс которой проходит через точки F_1, F_2, ось ординат – через середину отрезка F_1F_2:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b^2=a^2-c^2$,

$2c$ – расстояние между фокусами,

a – большая полуось эллипса,

b – малая полуось эллипса.

Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$.

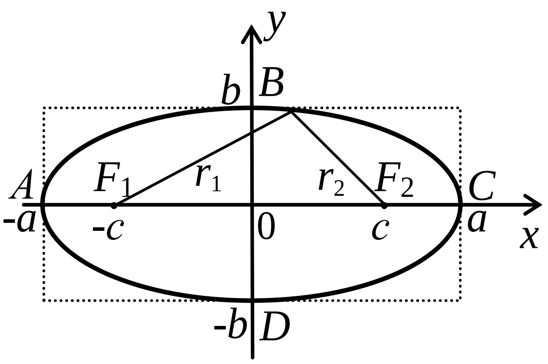


Рис. 4.8

Окружность – множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра). Частный случай эллипса ($c = 0$, $\varepsilon = 0$), соответствующий совмещению фокусов.

Уравнение окружности: $x^2+y^2=r^2$ или $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$,

где r – радиус, x_0, y_0 – координаты центра окружности.

Гипербола – множество точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек плоскости (фокусов) F_1 и F_2 постоянна (рис. 4.9): $|r_1-r_2|=2a$.

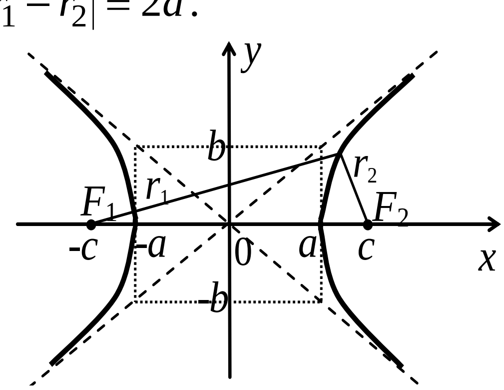


Рис. 4.9

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$,
$2c$ – расстояние между фокусами;
прямая, проходящая через точки $F_1 F_2$ – действительная ось гиперболы;
прямая $0y$ – мнимая ось гиперболы.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$.

При $a = b$ гипербола называется равносторонней. При повороте системы координат на 45^{O} уравнение равносторонней гиперболы имеет вид $y = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{x}$.

Парабола– множество точек плоскости, равноудаленных ($d = r$) от данной точки плоскости (фокуса) F и данной прямой l (директрисы) $x = -\frac{p}{2}$ (рис. 4.10).

Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px,\ (p > 0)$.

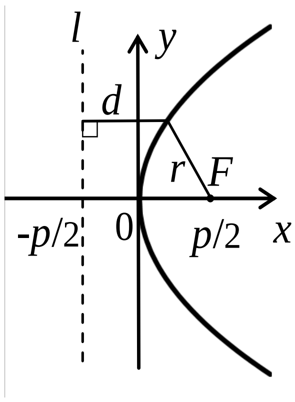


Рис. 4.10

Пример. Найти радиус R окружности $x^2 + y^2 + 8x + 12 = 0$.
$x^2 + y^2 + 8x + 12 = (x+4)^2 - 16 + y^2 + 12$; $(x+4)^2 + y^2 = 4$; $R = 2$.

Пример. Найти эксцентриситет эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

$a^2 = 25$, $b^2 = 9$, $c^2 = a^2 - b^2 = 16$; $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$.

Пример. Найти расстояние между фокусами гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$.

Каноническое уравнение гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$;

$a^2 = 9$, $b^2 = 16$, $c^2 = a^2 + b^2 = 25$.

Расстояние между фокусами: $2c = 10$.

Пример. Определить тип линии $r = \dfrac{1}{1+\sin\varphi}$.

Переход к декартовой системе координат: $r = \dfrac{1}{1+\sin\varphi}$; $r = \dfrac{1}{1+\dfrac{y}{r}}$;

$r = \dfrac{r}{r+y}$; $r + y = 1$; $r^2 = (1-y)^2$; $x^2 + y^2 = y^2 - 2y + 1$; $y = \dfrac{1}{2}(1-x^2)$.

$r = \dfrac{1}{1+\sin\varphi}$ – парабола (рис. 4.11).

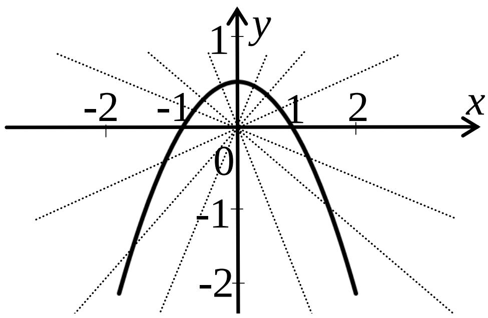


Рис. 4.11

ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ

1. Найдите наименьшее значение параметра k, при котором расстояние между точками $A(1; 2)$ и $B(k; -2)$ равно 5.

   Ответ: –2.

2. Докажите, что треугольник, заданный вершинами (5; –6), (–3; 9), (12; 1), является равнобедренным.

3. Найдите координаты точки M, если отрезок AB в три раза больше отрезка AM и известны координаты точек $A(1; 2)$ и $B(4; -4)$.

Ответ: (2; 0)

4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки (1; 5) и (3; 9).

   Ответ: $y = 2x + 3$.

5. При каком значении параметра k прямая $y = kx - 2$ проходит через точку пересечения прямых $2x + y - 5 = 0$ и $3x - 2y + 3 = 0$?

   Ответ: 5.

6. Найдите угол A треугольника ABC, заданного вершинами A(0; 3), B(3; 7), C (4; 0).

   Ответ: 90°.

7. Найдите длину высоты AH треугольника, заданного координатами вершин A(2; 3), B(5; 4), C(–8; 6).

   Ответ: 1,44.

8. Найдите декартовы координаты точки A, полярные координаты которой (4; π/6).

   Ответ: $x = 2\sqrt{3}$, $y = 2$.

9. Определите тип линии второго порядка, заданной уравнением $4x^2 + 5y^2 + 20x - 30y + 10 = 0$.

   Ответ: эллипс $\dfrac{(x+2,5)^2}{15} + \dfrac{(y-3)^2}{12} = 1$.

10. Составьте уравнение окружности с центром в точке (1; 2), проходящей через точку (–3; –1).

    Ответ: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$.

11. Составьте каноническое уравнение гиперболы, которая проходит через точки (–2; 0) и (10/3; 4).

    Ответ: $\dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$.

12. Определите параметр p <u>параболы y^2</u> <u>= 2px</u>, если она <u>проходит через точку (2; 4).</u>

Ответ: 4.

13. Исследуйте взаимное расположение эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ <u>и прямой $y = x + 1$.</u>

Ответ: прямая пересекает эллипс в двух точках.

14. Определите эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

Ответ: 5/3.

15. Найдите малую полуось эллипса $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{b^2}=1$, если эксцентриситет эллипса равен 0,8.

Ответ: 4/3.

16. Составьте уравнение плоскости, отсекающей отрезки 3; 2 и 1 на осях координат 0x, 0y, 0z.

Ответ: $2x+3y+6z-6=0$.

17. Установите значение A, при котором плоскость $2x + Ay - z - 3 = 0$ содержит точку (1; 2; 3).

Ответ: 2.

18. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0; 1; 1)$; $B(2; 0; 0)$; $C(1; 0; 3)$.

Ответ: $-3x+2y-z+6=0$.

19. Докажите, что уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно векторам $\bar{a}(a_x;a_y;a_z)$ и $\bar{b}(b_x;b_y;b_z)$ может быть записано $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0$.

20. Докажите, что точки A (3; –3; 5), B (–1; –1; –1), C (1; –2; 2) лежат на одной прямой.

21. Найдите длину медианы AD треугольника ABC, заданного координатами вершин A (–1; –3; 4), B (2; –4; –1), C (4; 6; 5).

Ответ: 6.

22. Найдите длину средней линии трапеции, заданной координатами вершин A(2; 0; –1), B(5; –1; 1), C(–2; 1; 3), D(–8; 3; –1).

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt{17}$.

23. Найдите координаты точки C, принадлежащей отрезку AB, если заданы координаты A(7; 3; 5), B(2; –2; 0) и отношение $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$.

Ответ: (4; 0; 2).

24. Найдите координаты вершины A треугольника ABC, если заданы координаты середин сторон CB, AC и AB: $(x_a;\ y_a;\ z_a)$, $(x_b;\ y_b;\ z_b)$, $(x_c;\ y_c;\ z_c)$ соответственно.

Ответ: $-x_a + x_b + x_c;\ -y_a + y_b + y_c;\ -z_a + z_b + z_c$.

25. Прямая в пространстве соединяет две точки с нулевыми абсциссами. Укажите плоскость, которой принадлежит эта прямая.

Ответ: плоскость yOz.

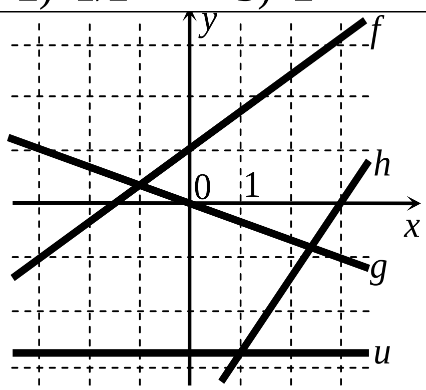
26. Найдите синус угла между прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{-8}$ и плоскостью $2x + y + 2z - 9 = 0$.

Ответ: 10/27.

27. Найдите координату z_0 точки $A(x_0; 2; z_0)$, принадлежащей прямой, перпендикулярной плоскости $3x + 2y - z + 5 = 0$ и проходящей через точку B(2; 0; –1).

Ответ: –2.

КОНТРОЛЬНЫЕ ТЕСТЫ

№	Задание	Ответ
1	Длина отрезка, отсекаемого прямой $2x + 3y - 6 = 0$ на оси $0x$, равна	
2	Если $A(1; 2)$ и $B(4; -2)$, то длина отрезка AB, равна	
3	Угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $A(1; 1)$ и $B(-1; 2)$, равен **1)** $-1/2$ **2)** $1/2$ **3)** 2 **4)** -2	
4	 В порядке возрастания угловых коэффициентов укажите последовательность прямых, представленных на рисунке. **1)** f **2)** h **3)** g **4)** u	
5	Если декартовы координаты точки A (0; 4), то ее полярные координаты равны	
6	Установите соответствие между кривыми второго порядка и их уравнениями: **1)** $3x^2 + y = 4$ **A)** окружность **2)** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ **B)** парабола **3)** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ **C)** гипербола **4)** $(x+6)^2 + (y-1)^2 = 16$ **D)** эллипс	

7	Установите соответствие уравнений кривых и их эксцентриситетов ε **1**) окружность — **A**) ε = 0 **2**) эллипс — **B**) ε = 1 **3**) парабола — **C**) ε > 1 **4**) гипербола — **D**) ε < 1	
8	Среди уравнений кривых укажите уравнение окружности. **1**) $x+(y-1)^2=4$ **2**) $x^2-(y-1)^2=4$ **3**) $x^2+(y-1)^2=4$ **4**) $4x^2+(y-1)^2=4$	
9	Координата x_0 точки $A(x_0; 2; 8)$, принадлежащей плоскости $5x + y + z + 5 = 0$, равна	
10	Нормальный вектор плоскости $4x+3y+2z+1=0$ равен **1**) (4; 3; 2) **2**) (3; 2; 1) **3**) (2; 3; 4) **4**) (1; 2; 3)	
11	Уравнение плоскости с нормальным вектором: (6; 5; 4), проходящей через точку $B(3; 2; 1)$ имеет вид **1**) $\frac{x-6}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-4}{1}$ **2**) $3(x-6)+2(y-5)+1(z-4)=0$ **3**) $\frac{x-3}{6}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-1}{4}$ **4**) $6(x-3)+5(y-2)+4(z-1)=0$	
12	Установите соответствие между уравнением плоскости и ее положением в пространстве **1**) $4 - 5x = 0$ — **A**) плоскость yOz **2**) $2 + 7y = 0$ — **B**) параллельна плоскости yOz **3**) $3y + 8z - 2 = 0$ — **C**) параллельна плоскости xOz **D**) параллельна оси x	
13	Направляющий вектор прямой $\frac{x-6}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-4}{1}$ равен **1**) (6; 5; 4) **2**) (3; 2; 1) **3**) (4; 5; 6) **4**) (1; 2; 3)	

14	Уравнение прямой с направляющим вектором $\bar{R}$ (6; 5; 4), проходящей через точку B(3; 2; 1) имеет вид **1**) $\frac{x-6}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-4}{1}$ **2**) $3(x-6)+2(y-5)+1(z-4)=0$ **3**) $\frac{x-3}{6}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-1}{4}$ **4**) $6(x-3)+5(y-2)+4(z-1)=0$	
15	Прямая в пространстве проходит через две точки с равными ненулевыми абсциссами. Эта прямая не может пересекать **1**) плоскость xOy **2**) плоскость xOz **3**) плоскость yOz **4**) ось абсцисс	
16	Уравнение плоскости, перпендикулярной прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{-1}$ и проходящей через точку (0; 0; 0) имеет вид **1**) $2x + z = 0$ **2**) $2x + z – 2 = 0$ **3**) $2x + y = 0$ **4**) $2y + z + 1 = 0$	

Практическое занятие 12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Пример. Найти собственные числа матрицы **A** = $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение имеет вид $\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

Раскрывая определитель:
$\lambda^3 – 18\lambda^2 + 99\lambda − 162 = (\lambda – 3)(\lambda^2 – 15\lambda + 54) = (\lambda – 3)(\lambda – 6)(\lambda – 9) = 0.$
Собственные числа матрицы **A**: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$.

Пример. Найти собственные столбцы (векторы) матрицы **A** = $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Сделать проверку.

Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$.

Собственные числа матрицы **A**: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$.

При $\lambda_1 = 2$ однородная система принимает вид:

$$\begin{cases} (5-2)x_1 - 3x_2 = 0 \\ 1x_1 + (1-2)x_2 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Одно из ненулевых решений системы: $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$.

Собственный вектор матрицы **A** для $\lambda_1 = 2$: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Проверка. $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\lambda\mathbf{X} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = 4$ однородная система принимает вид:

$$\begin{cases} (5-4)x_1 - 3x_2 = 0 \\ 1x_1 + (1-4)x_2 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1x_1 - 3x_2 = 0 \\ 1x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Одно из ненулевых решений системы: $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$.

Собственный вектор матрицы **A** для $\lambda_2 = 4$: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Проверка. $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\lambda\mathbf{X} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Пример. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$.

Собственные числа матрицы **A**: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

При $\lambda_1 = 1$ однородная система принимает вид:

$$\begin{cases} 0x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 0x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \\ 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Одно из ненулевых решений системы: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Собственный вектор матрицы **A** для $\lambda_1 = 1$: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = 2$ однородная система принимает вид:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0; \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Одно из ненулевых решений системы: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

Собственный вектор матрицы **A** для $\lambda_2 = 2$: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_3 = 3$ однородная система принимает вид:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 0x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases}$$

Одно из ненулевых решений системы: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 =$.

Собственный вектор матрицы **A** для $\lambda_3 = 3$: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.